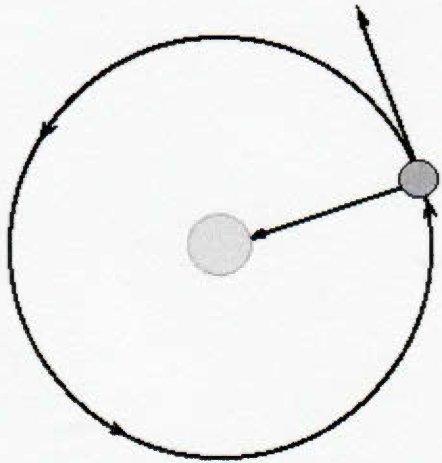
Como podemos calcular a massa da Terra, do Sol ou de um planeta?

A distância da Terra ao Sol pode ser determinada astronomicamente e podemos assim determinar a velocidade da Terra em volta do Sol. De posse do valor da velocidade da Terra, podemos calcular a força centrípeta necessária para manter a Terra na sua órbita em volta do Sol (A massa da Terra pode ser calculada através do peso de um objecto na superfície da Terra, ou seja, através da força gravitacional agindo sobre um objecto, usando a Lei da Gravitação Universal). Como a força centrípeta tem que ser igual à força de atracção gravítica entre a Terra e o Sol podemos então usar a Lei da Gravitação Universal para calcular massa do Sol .



De posse da massa do Sol, podemos pelo mesmo método determinar a massa de qualquer planeta desde que determinemos astronomicamente o raio orbital da sua órbita e o seu período de rotação. Então calculamos a força centrípeta requerida e igualamo-la à força predita pela Lei da Gravitação Universal, usando a massa do Sol. Se o planeta tem uma lua, se observarmos o tempo que ela o leva a orbitar e soubermos a sua distância ao planeta podemos usar o mesmo método para determinar a massa desse planeta. Embora Mercúrio e Vénus não tenham planetas, exercem uma certa força um no outro e nos outros planetas do sistema solar. Como resultado disso, os planetas seguem trajectórias ligeiramente diferentes das que seguiriam sem esse efeito perturbador. Desses desvios podem-se determinar com mais rigor a massa dos planetas sem satélites naturais. No caso dos asteróides, a forças gravíticas que eles exercem noutros corpos é mínima e só podemos fazer estimativas baseadas no seu tamanho e possível composição mineral. Contudo, agora, com base na trajectória de satélites artificiais que passam perto desses corpos podemos determinar as suas massas mais correctamente seguindo cuidadosamente a sua trajectória e usando medidas Doppler via radio da Terra. A massa do asteróide Matilde foi recentemente determinada com rigor quando o satélite NEAR passou perto dele. É consideravelmente menor do que se pensava.

Cálculo da massa da Terra

A Lei da Gravitação Universal de Issac Newton diz-nos que a força de atracção entre dois objectos é proporcional ao produto das suas massas dividido pelo quadrado da distância entre os seus centros de massa, ou seja $F=G\ (m1*m2)/d^2$. A constante de proporcionalidade é G, igual a $6,67 \times 10^{-11}$ ($kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$). (Cavendish determinou esta constante medindo com precisão a força horizontal entre duas esferas de metal numa experiência referida por vezes como «o pesar da Terra»).

Se assumirmos que o centro de massa da Terra está no seu centro geográfico e dado que conhecemos o raio da Terra podemos usar a Lei da Gravitação Universal para calcular a massa da Terra:

$$M_{T=}\ F*\ r_T^2/(G*M_O) = 5,972*10^{24}\ Kg,$$

em que F é o peso do objecto, isto é, a força gravitacional agindo sobre o objecto, de massa M_O, na superfície da Terra, e em que a distância entre os centros de massa tem um valor igual ao raio da Terra (r_T =6378,15 km) .

Mas o que é a gravidade? Sabemos, desde Newton, como é que a força da gravidade afecta o movimento dos objectos mas não sabemos porque é que ela age do modo que age. A ciência opta por uma visão instrumentalista do problema: explicar o «como» e não o «porquê». Depois de Newton, o universo passou a parecer-nos uma máquina perfeita, baseada na matemática. Alguém a pôs em movimento? E porquê? **Cálculo da massa do Sol**

A distância da Terra ao Sol ,d=149,600,000 km, pode ser determinada astronomicamente e podemos assim determinar a velocidade da Terra em volta do Sol:

$$v_T = 2p * 1,496*10^{11}\ m/ano = 2,98*10^4\ m/s$$

De posse do valor da velocidade da Terra, podemos calcular a força centrípeta necessária para manter a Terra na sua órbita em volta do Sol.

$$Fc= \frac{M_T*v_T^2)}{d} = 5.972*10^{24} *(2,98*10^4)^2 / 1,496*10^{11} = 35,4*10^{21}\ N$$

Como a força centrípeta tem que ser igual à força de atracção gravítica entre a Terra e o Sol, podemos então calcular massa do Sol usando a Lei da Gravitação Universal:

$$M_S= \frac{F*\ d^2}{G*M_T} = 35,4*10^{21} *(1,496*10^{11})^2 / (6,67*10^{-11}*5.972*10^{24}) = 1,989*10^{30}Kg$$

Note no entanto que se igualarmos a expressão da força centrípeta com a da força de atracção gravítica, podemos eliminar a massa da Terra do cálculo ficando então

$$G *M_S/d^2=v_T^2/d$$

e

$$M_S= \frac{v_T^2*d}{} = (2,98*10^4)^2 * 1,496*10^{11}/ 6,67*10^{-11} = 1,989*10^{30}Kg$$

G

O que isto quer dizer, basicamente, é que é a igualdade da aceleração gravítica com a aceleração centrípeta que é relevante. Se rescrevermos a mesma fórmula como

$$v^2=G^* M_S /d,$$

vemos que a velocidade orbital de um corpo no nosso sistema solar é apenas função da massa do Sol e da distância a que ele está do Sol (desprezando outras influências gravíticas menores, claro). A massa do corpo não é relevante.

Suponhamos que há um objecto em órbita em volta da Terra à distância a que está a Lua, d_L $=3{,}84404*10^8$m. Teríamos então que

$$v^2=G^* M_T / d_L =6{,}67*10^{-11}*5.972*10^{24} / 3{,}84404*10^8= 1{,}0362*10^6 \text{ e}$$
$$v=3664{,}64 \text{ km/h}.$$

E quanto tempo duraria a descrever uma órbita? Seria

$$P= 2*pi *3{,}84404*10^8/3664{,}64*10^3 = 659{,}0774 \text{ horas} = 27{,}46 \text{ dias}.$$

Obtemos sensivelmente a velocidade orbital e o período sideral da Lua!

Mas note que, quer fosse a Lua quer fosse uma maçã, teria sensivelmente a mesma órbita!

Cálculo da massa dos outros planetas

De posse da massa do Sol, podemos pelo mesmo método determinar a massa de qualquer planeta desde que determinemos astronomicamente o raio orbital da sua órbita e o seu período de rotação. Então calculamos a força centrípeta requerida e igualamo-la à força predita pela Lei da Gravitação Universal, usando a massa do Sol. Se o planeta tem uma lua, se observarmos o tempo que ela o leva a orbitar e soubermos a sua distância ao planeta podemos determinar a massa desse planeta usando a equação

$$M_P=(v_S^2*d_S) /G$$